

Opgave 1: Tijdintervallen*s.v.p. op een apart vel met naam en nr!*

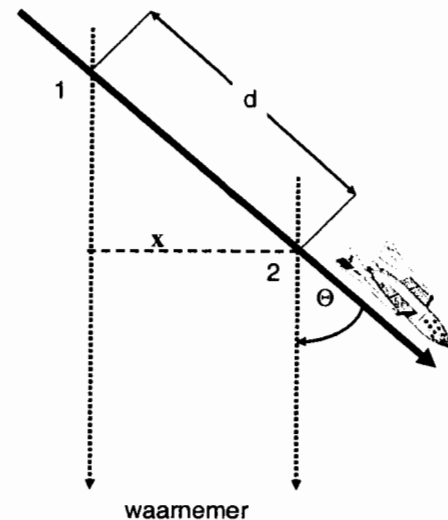
Een ster beweegt in een cirkelvormige baan rondom een zwart gat met een snelheid $v = 2/5$. De straal van de baan is $R = 10/\pi$ lichtseconden. We beschouwen twee coördinatenstelsels, een stilstaand stelsel S waarvan de oorsprong samenvalt met het zwarte gat en een bewegend (ander) stelsel S' dat ten opzichte van S beweegt met een snelheid $\beta = 3/5$ in de $+x$ richting. Gebeurtenis A is de gebeurtenis waarbij de ster het ruimte-tijd punt passeert met coördinaten $x_A = 0, y_A = 10/\pi, t_A = 0$ in het S systeem. Gebeurtenis B wordt gekarakteriseerd door de eerstvolgende passage van de ster door het ten opzichte van A diametraal tegenoverliggende punt met de ruimtelijke coördinaten $x_B = 0, y_B = -10/\pi$ in het S systeem.

- Bereken het coördinaten tijdinterval Δt tussen de gebeurtenissen A en B zoals waargenomen in het stilstaande stelsel S.
- Bereken het ruimte-tijd interval Δs tussen de gebeurtenissen A en B zoals waargenomen in het stilstaande stelsel S.
- Bereken het eigentijd (=proper time) interval $\Delta \tau$ tussen de gebeurtenissen A en B zoals gemeten met een klok die zich op de ster bevindt.
- Bereken de ruimte-tijd coördinaten van de gebeurtenissen A en B zoals waargenomen in het bewegende stelsel S' en het resulterende ruimte-tijd interval $\Delta s'$.
- De ster zendt licht uit met een golflengte $\lambda_0 = 500$ nm zoals waargenomen in haar eigen ruststelsel. Het geëmitteerde sterrelicht wordt ook waargenomen door een ver verwijderde astronoom die in rust is in het stilstaande stelsel S. Leg uit waarom de astronoom licht meet met een continuüm van golflengtes en bereken de breedte van dit continuüm.

Opgave 2: Sneller dan het licht?*s.v.p. op een apart vel met naam en nr!*

Een waarnemer op aarde ziet ver weg in het heelal een ruimteschip, dat met een snelheid v onder een hoek Θ vliegt (zie figuur). Het ruimteschip vliegt langs twee lichtbakens (1 en 2) en om de snelheid van het schip te bepalen, meet de waarnemer het verschil Δt_{zien} van de tijdstippen waarop hij het ruimteschip de bakens 1 en 2 ziet passeren.

- Bepaal als functie van Θ de schijnbare afstand x die het schip volgens de waarnemer overbrugt
- Bepaal de tijd Δt_{zien} die het schip over deze afstand lijkt te doen (licht heeft geen oneindig hoge snelheid!).
- Laat zien dat het schip aan de hemel lijkt te bewegen met een snelheid $v_{\text{zien}} = \frac{v \sin \Theta}{1 - (v/c) \cos \Theta}$
- Bereken de hoek waaronder de snelheid v_{zien} het hoogst lijkt te zijn (hint: bepaal de afgeleide van v_{zien} naar Θ en gebruik $\cos^2 \Theta + \sin^2 \Theta = 1$)
- Toon aan dat $v_{\text{zien}} > 1$ mogelijk is, dat het dus voor de waarnemer kan lijken of het schip beweegt met een snelheid hoger dan de lichtsnelheid.



s.v.p. elke opgave op een apart vel!

(nakijken door verschillende personen!)

Op elk vel naam en studentnummer vermelden!**Opgave 3: Een Duel****(s.v.p. op een apart vel met naam en nr!)**

Twee duellerende lieden A en B staan op 30 m afstand van elkaar en schieten tegelijkertijd ($t=0$) een kogel op elkaar af. Het coördinatenstelsel waarin A en B in rust zijn noemen we S. In dit stelsel bevindt zich A bij $x=0$ en B bij $x=30\text{m}$ (SI eenheden). De kogels worden met een snelheid van $v=0.8c$ op elkaar afgevuurd. Een astronaut in een passerend ruimteschip beziet het schouwspel. Het stelsel waarin hij in rust is, noemen we S', en dit beweegt met een snelheid van $\beta=0.6c$ ten opzichte van S. Neem aan dat de heren raak schieten.

- Teken een twee-waarnemers-diagram (*tip: oorsprong links onder op het vel, 10 ns per cm, i.e. per twee hokjes*) met de wereldlijnen van de twee lieden A en B en de wereldlijnen van de kogels. Bepaal op grafische manier de tijdstippen t_A en t_B waar A c.q. B geraakt worden
- Maak een ijking van de t' -as en de x' -as en bepaal op grafische manier de tijdstippen t'_A en t'_B .
- In stelsel S passeren de kogels elkaar halverwege de afstand van A en B. Bepaal op grafische manier de afstanden die de kogels op dat moment in S' hebben afgelegd.
- Controleer de resultaten van a) t/m c) m.b.v. de Lorentztransformaties. Bereken ook wanneer B geschoten heeft in de beleving van de astronaut.

Opgave 4: Efficiënte raketaandrijving**(s.v.p. op een apart vel met naam en nr!)**

In de ruimte willen we een object met een rustmassa m van stilstand naar een snelheid β (SR eenheden) versnellen. We willen nu de efficiëntie van twee verschillende raket voortstuwing technieken met elkaar vergelijken.

In het eerste experiment nemen we een raket met als brandstof een mengsel van materie en anti-materie, die gedurende het versnellingsproces op een gecontroleerde manier in fotonen wordt omgezet. De fotonen worden aan de achterkant van de raket in een parallelle bundel tegengesteld aan de bewegingsrichting van de raket uitgezonden. De totaal gegenereerde foton energie is E_1 . Het startgewicht van de raket is M_1 , de nuttige lading m , en de brandstof dus $M_1 - m$.

In het tweede experiment wordt de raket aan de achterkant uitgerust met een perfecte spiegel (100 % van het opvallend licht wordt gereflecteerd). Om de raket te versnellen wordt met een hoog vermogen laser, in ruste op een plaats in de ruimte, een bundel fotonen in een richting loodrecht op het oppervlak van de spiegel gericht. De impulsverandering door reflectie van de lichtbundel is de krachtbron van de raket. De totale op de spiegel vallende fotonenergie bedraagt E_2 . Bedenk dat in dit geval de inkomende en teruggekaatste fotonen bundel een verschillende energie (E_2 en E_2') hebben doordat de spiegel een voorwaartse snelheid heeft t.o.v. de laser (Dopplerverschuiving). Het eigen gewicht van de raketten en de spiegel kan in beide gevallen worden verwaarloosd.

Beantwoord nu de volgende vragen:

- Geef voor beide experimenten de vergelijking voor het behoud van de vier-impuls.
- Bepaal in beide gevallen het vereiste startgewicht van de raketten als functie van β , γ en de nuttige lading m .
- Bepaal de verhouding tussen de totale benodigde foton energieën E_1 en E_2 . Wat is deze verhouding bij zeer hoge snelheid. Geef hiervoor een fysische verklaring.

De efficiënties F_1 en F_2 van beide voortstuwing mechanismen zijn gedefinieerd als de fractie van de te versnellen nuttige massa m en de daarvoor gebruikte energie (in SR eenheden). In het eerste experiment is de gebruikte energie het gewicht van de meegevoerde materie/anti-materie brandstof, dus $M_1 - m$, en voor het tweede experiment is de gebruikte energie het verschil in energie van de inkomende fotonen bundel en de (Doppler verschoven) gereflecteerde bundel, dus $E_2 - E_2'$.

- Geef formules voor de efficiëntie van beide voortstuwing mechanismen als functie van β en γ . Wat is de totale balans uitgedrukt in de verhouding tussen beide efficiënties. Welke techniek heeft de voorkeur, en wat is de verwachte energie winst bij zeer hoge snelheid.
- Geef ook een simpele kwalitatieve fysische verklaring voor deze resultaten.